Análisis Comparativo de Controladores Lineales y No Lineales Aplicados a Cuadrotores: Enfoque de Consumo de Energía

José Ernesto Herrero-Brito * **Roger Miranda-Colorado** ** **Rubén Alejandro Garrido Moctezuma** *** **Luis T. Aguilar** *

* *Instituto Politécnico Nacional-CITEDI, Av. Instituto Politécnico Nacional No. 1310, Nueva Tijuana, Tijuana, Baja California, México, 22435. (e-mails: jherrero@citedi.mx, laguilarb@ipn.mx)*
** *CONACyT-Instituto Politécnico Nacional-CITEDI, Av. Instituto Politécnico Nacional No. 1310, Nueva Tijuana, Tijuana, Baja California, México, 22435. (e-mail: rmirandaco@gmail.com)*
*** *Departamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN, Av. Instituto Politécnico Nacional 2508, Gustavo A. Madero, San Pedro Zacatenco, 07360 Ciudad de México, México (e-mail: garrido@ctrl.cinvestav.mx)*

Resumen: Este artículo presenta un análisis comparativo de diversas técnicas de control clásicas y robustas aplicadas a cuadrotores para seguimiento de trayectorias. Los controladores se compararon entre sí para verificar la energía consumida. Se emplea una metodología para sintonizar las ganancias de los controladores a partir de parámetros de diseño cuantitativos, correspondientes a la respuesta temporal del sistema. Como parte del análisis se incluye una etapa de planeación de trayectorias con el objetivo de mejorar el desempeño de los controladores. En el análisis comparativo se emplea un controlador Proporcional Integral Derivativo, un controlador de tipo *backstepping* y un controlador por modos deslizantes. Los resultados de las simulaciones numéricas permiten inferir cuál de los controladores realiza un buen desempeño en la tarea de seguimiento de trayectorias a la vez que demanda un menor consumo de energía, lo que proporciona beneficios de autonomía en tareas en tiempo real.

Keywords: cuadrotor, vehículo autónomo, consumo energético, modelo dinámico, diseño de trayectorias.

1. INTRODUCCIÓN

Durante las últimas dos décadas ha aumentado de forma considerable la investigación sobre cuadrotores debido a que exhiben características que los hacen útiles para una gran variedad de aplicaciones que pueden ir desde usos recreativos hasta su empleo militar [Lyu et al. (2017)]. Dentro de dichas características se encuentran su tamaño pequeño, bajo peso y alta maniobrabilidad [Sanchez et al. (2012)]. Además, tienen la capacidad de mantenerse suspendidos en el aire a una altura deseada, lo cual les permite operar en ambientes pequeños. A pesar de que el uso de los cuadrotores brinda innumerables ventajas, también presenta problemas que restringen su utilización. Por ejemplo, cuando se opera un cuadorotor siempre hay perturbaciones impredecibles que lo afectan, sus acoplamientos dinámicos son altamente no lineales, presentan características de subactuación [Izaguirre-Espinosa et al. (2016)], y tienen un alto consumo de energía. Para solucionar el problema del consumo de energía, algunos autores proponen apagar los motores para ahorrar energía [Roberts et al. (2008)], mientras que otra solución consiste en usar métodos de optimización para obtener el impulso óptimo en todos los rotores [Aleksandrov and Penkov (2012)].

Los cuadrotores pueden ser controlados utilizando técnicas de control lineales y no lineales. Dentro de las primeras, el control Proporcional Integral Derivativo (PID) es uno de los más usados en las compañías que fabrican cuadrotores comerciales. En los enfoques no lineales, el control de tipo *backstepping* permite resolver sistemáticamente el problema de la subactuación a través de esquemas anidados y, a su vez, es físicamente intuitivo [Madani and Benallegue (2006),Chovancová et al. (2016)]. El Control por Modos Deslizantes (CMD) representa un tipo de estrategia de control robusta contra perturbaciones, incertidumbres, dinámicas no modeladas durante el llamado modo deslizante. No obstante, su principal desventaja es que produce oscilaciones de frecuencia finita conocidas como castañeo [Jayakrishnan (2016)]. Este problema, sin embargo, se puede superar utilizando un CMD de orden superior [Levant (2005)].

Las técnicas que se estudian en este artículo son: El control PID, el control CMD y el control de tipo *backstepping*. En la literatura existen trabajos que presentan comparaciones entre diversas estrategias de control [Özbek et al. (2016)]. Sin embargo, ninguno de los trabajos reportados en la literatura presenta un estudio comparativo entre controladores donde se muestre una metodología de sintonización estandarizada para las ganancias de los controladores junto con un análisis de la energía que éstos demandan. Un estudio de este tipo es importante debido a que sirve de guía en aplicaciones de tiempo real, en especial cuando el cuadrotor opera de manera autónoma. Por lo tanto, este artículo contribuye presentando una metodología que permite sintonizar las ganancias de controladores aplicados a un cuadrotor, así como un estudio comparativo enfocado en el consumo de energía, y que permite visualizar la ventaja de incluir una etapa de diseño de trayectorias cuando se controla al cuadrotor.

2. MODELO DINÁMICO DEL CUADROTOR

La Fig. 1 muestra un diagrama esquemático de un cuadrotor junto con el sistema de referencia inercial $\{A\}$ y el sistema de referencia $\{B\}$ unido al centro de masa del cuerpo del cuadrotor.

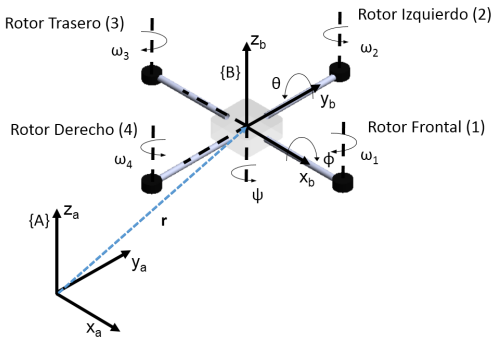

Figura 1. Diagrama esquemático de un cuadrotor.

En el análisis se emplean las siguientes definiciones: m es la masa total del cuadrotor, L es la distancia desde el centro de masa del cuadrotor al centro de cada rotor en el plano definido por los rotores, $\mathbf{r} = [x\ y\ z]^{\mathbf{T}}$ es el vector de posición del centro de masa del cuadrotor, I_{xx}, I_{yy} e I_{zz} son los momentos de inercia principales del cuadrotor con respecto a los ejes $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ del sistema de referencia $\{B\}$ respectivamente [Miranda-Colorado (2016)]. El vector de velocidad angular del cuadrotor expresado en $\{B\}$ se define como $\boldsymbol{\omega} = [p\ q\ r]^T \in \mathbb{R}^3$, mientras que $\boldsymbol{\Theta} = [\phi\ \theta\ \psi]^T$ y $\dot{\boldsymbol{\Theta}} = \left[\dot{\phi}\ \dot{\theta}\ \dot{\psi}\right]^T \in \mathbb{R}^3$ son los vectores de posición y velocidad angular del cuadrotor respectivamente, ambos expresados en el sistema de referencia $\{A\}$. Los vectores $\boldsymbol{\xi} = [\mathbf{r}\ \boldsymbol{\Theta}]^T$ y $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \left[\dot{\mathbf{r}}\ \dot{\boldsymbol{\Theta}}\right]^T \in \mathbb{R}^6$ corresponden a las posiciones y velocidades lineal y angular del cuadrotor respectivamente, ambos expresados con respecto al sistema de referencia $\{A\}$.

Las ecuaciones dinámicas de un cuadrotor expresadas en el sistema de referencia $\{A\}$ están dadas por [Sumantri et al. (2016)]:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$J \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_\phi \\ \beta_\theta \\ \beta_\psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_\phi \\ A_\theta \\ A_\psi \end{bmatrix}, \tag{2}$$

con:

$$J = \begin{bmatrix} I_{xx}c_\theta & 0 & -I_{xx}s_\theta c_\phi \\ 0 & I_{yy} & I_{yy}s_\phi \\ I_{zz}s_\theta & 0 & I_{zz}c_\theta c_\phi \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \beta_\phi =& (I_{xx} + I_{yy} - I_{zz})\dot{\phi}\dot{\theta}s_\theta + (-I_{xx} + I_{yy} \\ & - I_{zz})\dot{\phi}\dot{\psi}s_\phi s_\theta + (I_{xx} + I_{yy} - I_{zz})\dot{\theta}\dot{\psi}c_\theta c_\phi \\ & + (I_{yy} - I_{zz})\dot{\psi}^2 s_\phi c_\phi c_\theta, \\ \beta_\theta =& (-I_{yy} + (I_{zz} - I_{xx})c_{2\theta})\dot{\phi}\dot{\psi}c_\phi + (I_{zz} - I_{xx}) \\ & (\dot{\phi}^2 - \dot{\psi}^2 c_\phi^2)s_\theta c_\theta, \\ \beta_\psi =& (-I_{zz} + I_{xx} - I_{yy})\dot{\phi}\dot{\theta}c_\theta + (I_{zz} + I_{xx} \\ & - I_{yy})\dot{\phi}\dot{\psi}s_\phi c_\theta + (I_{zz} - I_{xx} + I_{yy})\dot{\theta}\dot{\psi}c_\phi s_\theta \\ & - (I_{xx} - I_{yy})\dot{\psi}^2 s_\phi c_\phi s_\theta, \end{aligned} \tag{4}$$

donde s_α y c_α representan las funciones $\sin(\alpha)$ y $\cos(\alpha)$ respectivamente.

El término $U_1 = \sum_{i=1}^4 T_i = k_F \sum_{i=1}^4 \omega_i^2$ es el empuje total aplicado a la estructura del cuadrotor en flotación y suponiendo idénticos los cuatro rotores. T_i es el impulso generado por la i-ésima hélice a lo largo de la dirección normal al plano definido por los rotores, k_F [kg m], $k_F > 0$ es la constante de empuje y ω_i es la velocidad angular del i-ésimo rotor. $U_2 = L[T_2 - T_4]$ representa la diferencia en par entre los rotores izquierdo y el derecho. $U_3 = L[T_3 - T_1]$ es la diferencia de par entre los rotores trasero y el frontal. $U_4 = M_1 - M_2 + M_3 - M_4$ es la diferencia de par entre los rotores que giran en sentido de las manecillas del reloj y los que lo hacen en contra. M_i es el par generado por la i-ésima hélice a lo largo del eje $\mathbf{z}$ y k_M es la constante de arrastre. La matriz de rotación R que transforma las coordenadas del cuadrotor del sistema de referencia $\{B\}$ al sistema de referencia $\{A\}$ se obtiene usando los ángulos de Euler z-x-y [Miranda-Colorado (2016)]. Las ecuaciones dinámicas (1) y (2) se expresan en el sistema de referencia $\{A\}$ debido a que los controladores fueron diseñados en dicho sistema de referencia.

Los parámetros A_x, A_y, A_z y A_ϕ, A_θ, A_ψ representan la fuerza aerodinámica y de distribución, y los pares aerodinámico y de perturbación respectivamente [Gomes and Ramos (1998)], y se calculan de la siguiente manera:

$$\left[A_x\ \ A_y\ \ A_z\right]^T = \frac{1}{2}\rho V^{\frac{2}{3}} \left[\dot{x}^2 C_x\ \ \dot{y}^2 C_y\ \ \dot{z}^2 C_z\right] [N], \tag{5}$$

$$\left[A_\phi\ \ A_\theta\ \ A_\psi\right]^T = \frac{1}{2}\rho V \left[\dot{\phi}^2 C_\phi\ \ \dot{\theta}^2 C_\theta\ \ \dot{\psi}^2 C_\psi\right] [Nm], \tag{6}$$

donde C_x, C_y, C_z, C_ϕ, C_θ y C_ψ son los coeficientes de arrastre, lateral, de empuje, del momento de alabeo, del momento de cabeceo y del momento de guiñada, respectivamente, V (m^3) es el volumen de la aeronave, y ρ es la densidad del aire.

A partir de las expresiones que definen a U_1, U_2, U_3 y U_4, es posible escribir las entradas de control de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_F & k_F & k_F & k_F \\ 0 & Lk_F & 0 & -Lk_F \\ -Lk_F & 0 & Lk_F & 0 \\ k_M & -k_M & k_M & -k_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

La ecuación (7) es invertible si $L \neq 0$, $k_F \neq 0$ y $k_M \neq 0$ y permite considerar al empuje total y al momento neto como entradas de control. Además, permite calcular la velocidad angular requerida en cada rotor. Esto último es necesario en el análisis comparativo que se desarrolla en las próximas secciones.

3. PLANEACIÓN DE TRAYECTORIAS

El cuadrotor es un sistema dinámico con restricciones que le impiden seguir trayectorias arbitrarias. Por esto se hace imprescindible la generación de trayectorias suaves [Mellinger and Kumar (2011)]. Para el diseño de este tipo de trayectorias, una opción consiste en minimizar la razón de cambio de la entrada de control [Kumar, V. (2017)]. Además, esta minimización permite disminuir la magnitud de las señales de control.
Puede verificarse en (1)-(2) que las entradas de control U_2 y U_3 son funciones de la cuarta derivada de la posición $\mathbf{r}$, por lo que el diseño de trayectorias puede enfocarse en la minimización de la cuarta derivada de la posición con respecto al tiempo (en inglés, *snap*) [Mellinger and Kumar (2011)]. Ésto permite incluir en el diseño de la trayectoria restricciones en la posición, la velocidad, la aceleración y la tercera derivada de la posición con respecto al tiempo (en inglés, *jerk*) deseados. Lo anterior define las condiciones de frontera en cada tramo de la trayectoria.
Para el diseño de trayectorias se utiliza la funcional propuesta en [Gelfand et al. (2000)]. La trayectoria se diseña para el movimiento traslacional, por lo que la trayectoria óptima se obtiene como:

$$\mathbf{r}^*(t) = \underset{x,y,z}{\arg\min} \int_{t_0}^{t_f} \left\| \mathbf{r}^{(4)}(t) \right\|^2 dt \tag{8}$$

donde $\mathbf{r}^*(t) = [x^*(t) \quad y^*(t) \quad z^*(t)]$ es la trayectoria óptima, y t_0 y t_f son los tiempos de inicio y fin de la trayectoria, respectivamente.

La trayectoria total puede dividirse en varios tramos intermedios $\mathbf{r}_1, ...\mathbf{r}_m$ y cada uno de éstos segmentos se calcula empleando las ecuaciones de Euler-Poisson usando el índice de desempeño $\mathcal{L} = \left\| \mathbf{r}^{(4)}(t) \right\|^2$ [Mian and Daobo (2008)]. De esta manera, la ecuación de la trayectoria óptima del cuadrotor es:

$$\mathbf{r}(t) = \left[\sum_{i=1}^{8} c_{ix} t^{i-1}, \sum_{i=1}^{8} c_{iy} t^{i-1}, \sum_{i=1}^{8} c_{iz} t^{i-1} \right]^T. \tag{9}$$

En (9) los coeficientes c_{ij}, $i = 1, 2, ..., 8$ y $j = x, y, z$, se obtienen resolviendo la ecuación:

$$\mathbf{c}_{ij} = \Delta^{-1} \begin{bmatrix} a_j & b_j & c_j & d_j & e_j & f_j & g_j & h_j \end{bmatrix}^T \tag{10}$$

Los coeficientes a_j, c_j, e_j, g_j y b_j, d_j, f_j, h_j corresponden a los valores de la posición, la velocidad, la aceleración y el *jerk* deseados en el tiempo inicial y final del tramo de trayectoria respectivamente. La matriz $\Delta \in \mathbb{R}^{8\times 8}$ es común para las trayectorias en los tres ejes coordenados, puede verificarse que es invertible para $t_0 > 0$ y $t_f > 0$, y se define como:

$$\Delta = \begin{bmatrix} t_0^7 & t_0^6 & t_0^5 & t_0^4 & t_0^3 & t_0^2 & t_0 & 1 \\ t_f^7 & t_f^6 & t_f^5 & t_f^4 & t_f^3 & t_f^2 & t_f & 1 \\ 7t_0^6 & 6t_0^5 & 5t_0^4 & 4t_0^3 & 3t_0^2 & 2t_0 & 1 & 0 \\ 7t_f^6 & 6t_f^5 & 5t_f^4 & 4t_f^3 & 3t_f^2 & 2t_f & 1 & 0 \\ 42t_0^5 & 30t_0^4 & 20t_0^3 & 12t_0^2 & 6t_0 & 2 & 0 & 0 \\ 42t_f^5 & 30t_f^4 & 20t_f^3 & 12t_f^2 & 6t_f & 2 & 0 & 0 \\ 210t_0^4 & 120t_0^3 & 60t_0^2 & 24t_0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 210t_f^4 & 120t_f^3 & 60t_f^2 & 24t_f & 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

4. ALGORITMOS DE CONTROL

Las estrategias de control que se seleccionaron en este análisis fueron: El controlador PID presente en [Wang et al. (2014)], el controlador de tipo *backstepping* diseñado en [Mian and Daobo (2008)], y el controlador CMD diseñado en [Sumantri et al. (2016)]. El control PID se seleccionó por ser una estrategia de control ampliamente utilizada en compañías que desarrollan cuadrotores comerciales. El control de tipo *backstepping* se seleccionó debido a que permite resolver el problema de la subactuación del cuadrotor a través de esquemas anidados. El control CMD se eligió por tratarse de una técnica de control robusta ante perturbaciones acopladas acotadas. Éstas técnicas de control se describen a continuación, y de ahora en adelante se supondrá que los ángulos ϕ_d y θ_d cumplen con la condición $|\phi(t)| \leq \pi/2$, $|\theta(t)| \leq \pi/2$.

4.1 Control PID

Las entradas de control de la ley de control PID se calculan de la siguiente manera [Wang et al. (2014)]:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{mg}{c_\phi c_\theta} + k_{pz}[z_d - z] + k_{iz} \int_0^t [z_d - z] d\tau + k_{dz}[\dot{z}_d - \dot{z}], \\ U_2 &= k_{p\phi}[\phi_d - \phi] - k_{d\phi}\dot{\phi}, \\ U_3 &= k_{p\theta}[\theta_d - \theta] - k_{d\phi}\dot{\theta}, \\ U_4 &= k_{p\psi}[\psi_d - \psi] - k_{d\psi}\dot{\psi}, \end{aligned} \tag{12}$$

donde g es la aceleración de la gravedad, y k_{pz}, $k_{p\phi}$, $k_{p\theta}$, $k_{p\psi}$, k_{dz}, $k_{d\phi}$, $k_{d\theta}$, $k_{d\psi}$, k_{iz} son ganancias positivas.
Para el control del cuadrotor, el usuario proporciona los valores deseados de la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ y del ángulo $\psi_d(t)$. Los valores de ϕ_d y θ_d pueden obtenerse empleando (1), y están dados por:

$$\begin{aligned} \phi_d &= \arctan\left[\frac{s_{\psi_d} u_x}{U_1} - \frac{c_{\psi_d} u_y}{U_1} \right], \\ \theta_d &= \arctan\left[\frac{c_{\phi_d} c_{\psi_d} u_x}{U_1} + \frac{c_{\phi_d} s_{\psi_d} u_y}{U_1} \right], \end{aligned} \tag{13}$$

con $u_x = m[k_{px}[x_d - x] + k_{ix} \int_0^t [x_d - x] d\tau + k_{dx}[\dot{x}_d - \dot{x}]]$ y $u_y = m[k_{py}[y_d - y] + k_{iy} \int_0^t [y_d - y] d\tau + k_{dy}[\dot{y}_d - y]]$. Los términos k_{px}, k_{py}, k_{dx}, k_{dy}, k_{ix}, k_{iy} son constantes positivas.

4.2 Controlador de tipo backstepping

Las entradas de control para este controlador se calculan como [Mian and Daobo (2008)]:

$$U_1 = \frac{mg}{c_\phi c_\theta} + \frac{\bar{k}_{pz}[z_d - z] - \bar{k}_{dz}\dot{z}}{c_\phi c_\theta}, \tag{14}$$

$$U_2 = \frac{I_{xx}}{l}\left[\bar{k}_{p\phi}[\phi_d - \phi] + \bar{k}_{i\phi}\int_0^t [\phi_d - \phi]d\tau + \bar{k}_{d\phi}[\dot{\phi}_d - \dot{\phi}] + \ddot{\phi}_d - \dot{\theta}\dot{\psi}\left[\frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}\right]\right],$$

$$U_3 = \frac{I_{yy}}{l}\left[\bar{k}_{p\theta}[\theta_d - \theta] + \bar{k}_{i\theta}\int_0^t [\theta_d - \theta]d\tau + \bar{k}_{d\theta}[\dot{\theta}_d - \dot{\theta}] + \ddot{\theta}_d - \dot{\phi}\dot{\psi}\left[\frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}}\right]\right],$$

$$U_4 = \frac{I_{zz}}{l}\left[\bar{k}_{p\psi}[\psi_d - \psi] + \bar{k}_{i\psi}\int_0^t [\psi_d - \psi]d\tau + \bar{k}_{d\psi}[\dot{\psi}_d - \dot{\psi}] + \ddot{\psi}_d - \dot{\theta}\dot{\phi}\left[\frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}}\right]\right],$$

donde $\bar{k}_{pz}$, $\bar{k}_{p\phi}$, $\bar{k}_{p\theta}$, $\bar{k}_{p\psi}$, $\bar{k}_{dz}$, $\bar{k}_{d\phi}$, $\bar{k}_{d\theta}$, $\bar{k}_{d\psi}$, $\bar{k}_{i\phi}$, $\bar{k}_{i\theta}$, $\bar{k}_{i\psi}$ son ganancias positivas.
De modo similar al caso del controlador PID, los ángulos ϕ_d y θ_d se obtienen empleando las siguientes ecuaciones:

$$\phi_d = \arctan\left[\frac{s_{\psi_d}u_{ex}}{U_1} - \frac{c_{\psi_d}u_{ey}}{U_1}\right],$$
$$\theta_d = \arctan\left[\frac{c_{\phi_d}c_{\psi_d}u_{ex}}{U_1} + \frac{c_{\phi_d}s_{\psi_d}u_{ey}}{U_1}\right], \tag{15}$$

con $u_{ex} = m\left[\bar{k}_{px}\left[x_d - x\right] + \bar{k}_{dx}\left[\dot{x}_d - \dot{x}\right]\right]$ y $u_{ey} = m\left[\bar{k}_{py}\left[y_d - y\right] + \bar{k}_{dy}\left[\dot{y}_d - \dot{y}\right]\right]$. Los términos $\bar{k}_{px}$, $\bar{k}_{py}$, $\bar{k}_{dx}$, $\bar{k}_{dy}$ son constantes positivas.

4.3 Control por Modos Deslizantes

Para el diseño del controlador CMD descrito en [Sumantri et al. (2016)] se emplea la superficie de deslizamiento $\mathbf{s} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \Lambda\boldsymbol{\epsilon} + \mathrm{A}\int_0^t \boldsymbol{\epsilon}(\tau)d\tau$, donde $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\xi}_d - \boldsymbol{\xi}$. Las matrices $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_i\}$, $\mathrm{A} = \mathrm{diag}\{\alpha_i\} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$, son diagonales con entradas positivas. Este controlador emplea una ley de control intermedia que se encarga de forzar las trayectorias del sistema, para que éstas converjan a la superficie de deslizamiento. Esta ley de control intermedia $\mathbf{v}$ se calcula como:

$$\mathbf{v} = \ddot{\boldsymbol{\xi}}_d + \Lambda\dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathrm{A}\boldsymbol{\epsilon} + K\mathbf{s} + Q\mathrm{sat}(\mathbf{s}), \tag{16}$$

donde $\mathbf{v} = \left[v_x\ v_y\ v_z\ v_\phi\ v_\theta\ v_\psi\right]^T$. Las matrices $K = \mathrm{diag}\{k_i\}$, $\Gamma = \mathrm{diag}\{\gamma_i\}$, $Q = \mathrm{diag}\{q_i\} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ son matrices diagonales de ganancias positivas.
Finalmente, las entradas de control U_i, $i = 1, ..., 4$, se obtienen empleando:

$$U_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + [v_z + g]^2},$$
$$\left[U_2\ U_3\ U_4\right]^T = J\left[v_\phi\ v_\theta\ v_\psi\right]^T - \left[\beta_\phi\ \beta_\theta\ \beta_\psi\right]^T, \tag{17}$$

y los ángulos ϕ_d, θ_d se calculan de la siguiente manera:

$$\phi_d = \arctan\left[\frac{v_x s_{\psi_d} - v_y c_{\psi_d}}{v_z + g}\right] \tag{18}$$
$$\theta_d = \arctan\left[\frac{v_x c_{\psi_d} + v_y s_{\psi_d}}{\sqrt{\left[v_x s_{\psi_d} - v_y c_{\psi_d}\right]^2 + [v_z + g]^2}}\right].$$

5. ANÁLISIS COMPARATIVO

La metodología que se propone para la comparación del desempeño de los controladores se muestra en la Fig. 2.

Para la sintonización de las ganancias de los controladores se empleó el modelo linealizado del cuadrotor. Éste fue utilizado debido a que las simulaciones en las tareas de seguimiento de trayectorias se realizan con trayetorias suaves. Por lo tanto, el cuadrotor opera alrededor de la posición de suspensión en el aire y se puede realizar una aproximación con ángulos pequeños. A partir de (1)-(2), y considerando $\phi \approx 0$, $\theta \approx 0$, se obtiene el modelo linealizado del cuadrotor:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta c_{\psi_d} + \phi s_{\psi_d} \\ \theta s_{\psi_d} - \phi c_{\psi_d} \\ 1 \end{bmatrix} U_1, \tag{19}$$

$$\mathbf{I}\left[\ddot{\phi}\ \ddot{\theta}\ \ddot{\psi}\right]^T = \left[U_2\ U_3\ U_4\right]^T. \tag{20}$$

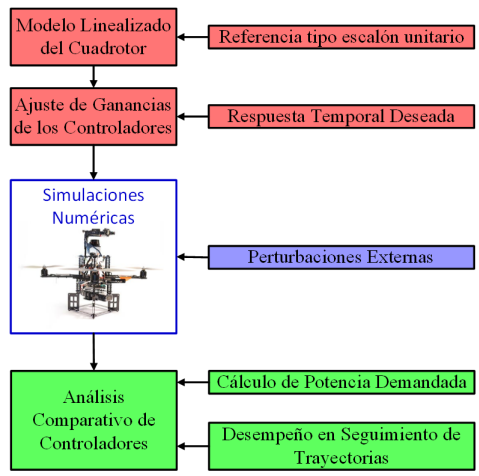

Figura 2. Diagrama de la metodología empleada para realizar el análisis comparativo de los controladores.

Los controladores se implementaron en Matlab-Simulink, utilizando como señal de referencia una entrada de tipo escalón unitario. Las ganancias de los controladores se ajustaron de tal forma que la respuesta temporal del sistema linalizado cumpliera con los parámetros de diseño establecidos en la Tabla 1:

Tabla 1. Parámetros deseados para la respuesta temporal del sistema.

Parámetro	Valor Deseado
Porcentaje de Pico Máximo (%PM)	<10 %
Tiempo de levantamiento (t_l)	<2 s
Tiempo de establecimiento (t_e)	<4 s

Una vez sintonizadas las ganancias de los controladores se llevaron a cabo simulaciones numéricas utilizando el modelo no lineal (1)-(2) del cuadrotor y las trayectorias a seguir se diseñaron empleando la metodología descrita en la Sección 3. A partir de las simulaciones numéricas se analizaron los errores de seguimiento de posición y orientación. Además, se calculó la potencia eléctrica requerida por cada controlador, lo cual permitió verificar el desempeño de cada uno de ellos.

Para calcular la energía demandada por el cuadrotor se consideran los motores de Corriente Directa (CD) que actuan sus hélices, como una carga resistiva. Por lo tanto,

la potencia eléctrica demandada por cada motor de CD se puede calcular de la siguiente forma [Sumantri et al. (2016)]:

$$P_i = \frac{V_i^2}{R_i} \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{21}$$

donde P_i es la potencia eléctrica demandada, V_i es el voltaje y R_i es la resistencia interna, en el i-ésimo rotor. El voltaje de armadura V_i puede ser calculado a partir de las ecuaciones dinámicas del motor de CD [Bouadi et al. (2007)]:

$$V_i = \left[\frac{R_i J_r}{k_m}\right] \dot{\omega}_i + \left[\frac{R_i k_r}{k_m}\right] \omega_i^2 + k_e \omega_i + \frac{R_i B}{k_m} \tag{22}$$

donde k_e es la constante de la fuerza contraelectromotriz, k_m es la constante de par, k_r es la constante de carga, J_r es la inercia y B es el coeficiente de fricción viscosa. Nótese que las velocidades angulares ω_i se pueden calcular empleando los valores U_i y la ecuación (7).

Para evaluar el desempeño de los controladores se utilizó el valor RMS de las señales de error de seguimiento de posición y orientación, así como las potencias demandadas. El valor RMS se calculó cuando el sistema alcanza el estado estable, es decir, $5 \leq t \leq 110$ s. El valor RMS de una señal $x(t)$ se calcula como:

$$X_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |x(n)|^2}, \tag{23}$$

donde N es el número total de muestras tomadas de la señal $x(n)$.

Utilizando la metodología de comparación propuesta, se realizaron simulaciones numéricas empleando Matlab-Simulink con un período de muestreo $t_m = 1$ ms. Al aplicar el procedimiento de sintonización de los controladores se obtuvieron las ganancias que se muestran en la Tabla 2. En las simulaciones, los parámetros empleados para el cuadrotor fueron: $m = 1.65$ kg, $V = 0.07967$ m^3, $I_{xx} = 0.04567$ kgm^2, $I_{yy} = 0.03087$ kgm^2, $I_{zz} = 0.04576$ kgm^2, $L = 0.211$ m, $\rho = 1.2254$ kg/m^3, $g = 9.807$ m/s^2, $k_F = 8.54858 \times 10^{-6}$ kgm, $k_M = 1.3678 \times 10^{-7}$ kgm, $C_x = C_y = C_z = C_\phi = C_\theta = C_\psi = 1$, $k_e = 21.63 \times 10^{-3}$ Nm/s, $k_m = 23.66 \times 10^{-3}$ Nm/s, $k_r = 3.46 \times 10^{-6}$ Nm/s, $J_r = 2.84 \times 10^{-5}$ kgm^2 y $B = 5.28 \times 10^{-3}$ Nm/A y $R_i = 2.98\ \Omega$. En todas las simulaciones se consideró la condición inicial $\boldsymbol{\xi}(0) = [0.05\ 0.05\ 0\ 0.05\ 0.05\ 0.05]^T$.
La trayectoria de referencia diseñada se dividió en tres segmentos, el primero con duración de 40 segundos y los otros de 35 segundos cada uno, como se muestra en la Fig. 3. En cada segmento, las condiciones de frontera para la velocidad, la aceleración y el *jerk* se establecieron en cero. Para el ángulo deseado ψ_d se utilizó una función sinusoidal de amplitud unitaria y frecuencia de $1\,rad/s$. Para analizar la robustez de los controladores, se consideraron las perturbaciones externas: A_x, A_ϕ, A_y, A_θ, A_z, y A_ψ que comienzan a actuar a partir del segundo 10, 20, 30, 40, 50 y 60, respectivamente.

La Fig. 4 muestra los errores de seguimiento. Nótese que el error que presenta el controlador CMD es el menor para los tres controladores comparados (Ver Tabla 4). Sin embargo, en la Tabla 3 se observa que el controlador CMD demanda la mayor cantidad de energía al sistema, resultado esperado debido a que es un controlador de alta ganancia.
El controlador *backstepping* exhibe el peor desempeño en seguimiento a lo largo del eje **z** (Ver Fig. 4). Además en la Tabla 3 se puede observar que su demanda de energía es similar a la del controlador CMD.
Finalmente, a partir de la Tabla 3 se puede verificar que el controlador PID es el que requiere la menor cantidad de energía para controlar al cuadrotor. Con respecto a los errores de seguimiento en los ejes **x**, **y**, el controlador PID es el que presenta las mayores magnitudes de error con respecto a los otros controladores (ver Fig. 4, Tabla 4). Sin embargo, el error máximo que se presenta es de 0.02 m. Si la tarea en la que el cuadrotor se empleará permite errores de esta magnitud, es posible concluir que el controlador PID es la mejor opción para controlar el cuadrotor ya que permitirá tener errores de seguimiento de baja magnitud, y será el que menor energía demande al sistema, lo cual es una ventaja para aplicaciones en tiempo real.

Tabla 2. Ganancias de los controladores.

PID	x	y	z	ϕ	θ	ψ
k_p	2.4	2.4	4.8	220	220	10
k_d	2.4	2.4	6	40	40	1.5
k_i	0.003	0.003	0.28	-	-	-
Backstepping						
k_p	5	5	4.5	75	50	200
$\bar{k}_d$	8	8	8	42	48	52.2
$\bar{k}_i$	-	-	-	5.5	5.5	11
CMD						
A	0.005	0.005	0.005	0.04	0.02	0.06
Λ	3	4	11.7	85	85	15
K	3.2	1.7	1.76	22	50	10
Q	0.3	0.3	0.5	50	50	10
Γ	0.2	0.2	0.2	0.38	0.3	0.2

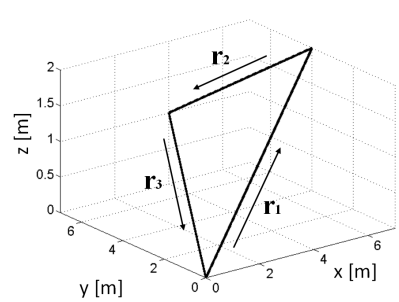

Figura 3. Trayectoria de Referencia.

Tabla 3. Valor RMS de la Potencia Eléctrica Demandada [W].

	PID	*Backstepping*	CMD
$P_{1(RMS)}$	$\mathbf{1.698 \times 10^4}$	1.702×10^4	1.702×10^4
$P_{2(RMS)}$	$\mathbf{1.732 \times 10^4}$	1.748×10^4	1.748×10^4
$P_{3(RMS)}$	$\mathbf{1.698 \times 10^4}$	1.702×10^4	1.702×10^4
$P_{4(RMS)}$	$\mathbf{1.732 \times 10^4}$	1.748×10^4	1.748×10^4
$P_{T(RMS)}$	$\mathbf{6.689 \times 10^4}$	6.703×10^4	6.704×10^4

Tabla 4. Valor RMS del error de seguimiento.

	PID	*Backstepping*	CMD
$e_{x(RMS)}$ [m]	7.8×10^{-3}	4.4×10^{-3}	$\mathbf{1.9 \times 10^{-4}}$
$e_{y(RMS)}$ [m]	8.4×10^{-3}	4.1×10^{-3}	$\mathbf{1.9 \times 10^{-4}}$
$e_{z(RMS)}$ [m]	1.7×10^{-3}	8.7×10^{-2}	$\mathbf{1.6 \times 10^{-5}}$
$e_{\phi(RMS)}$ [rad]	2.2×10^{-4}	4.0×10^{-4}	$\mathbf{9.5 \times 10^{-7}}$
$e_{\theta(RMS)}$ [rad]	2.3×10^{-4}	8.1×10^{-4}	$\mathbf{5.4 \times 10^{-7}}$
$e_{\psi(RMS)}$ [rad]	0.266	1.2×10^{-3}	$\mathbf{6.1 \times 10^{-4}}$

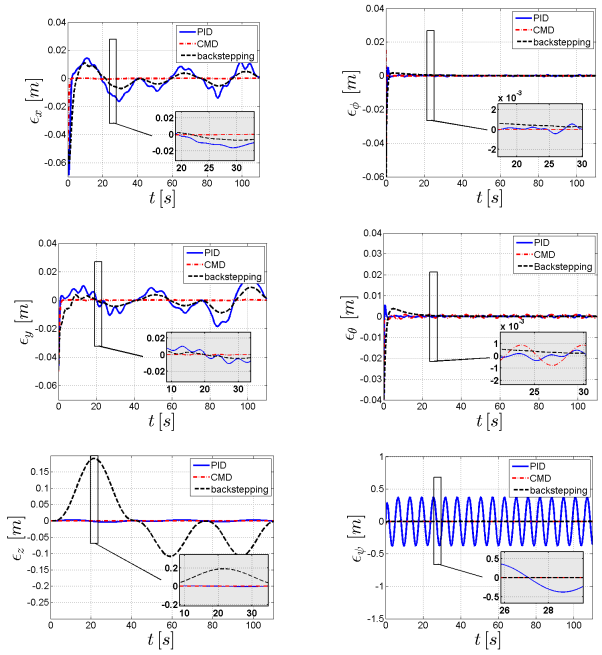

Figura 4. Errores de Seguimiento.

6. CONCLUSIONES

En éste artículo se presentó un análisis comparativo realizado mediante simulaciones numéricas de los controladores PID, *backstepping* y CMD, aplicados a un cuadrotor. Se describió una metodología que permite la sintonización de las ganancias de los controladores, así como una etapa de diseño de trayectorias. Se llevaron a cabo una serie de simulaciones numéricas a partir de las cuales se obtuvieron las características que exhibe cada uno de los controladores cuando el cuadrotor se ve afectado por perturbaciones. Por medio del análisis comparativo se verificó que el controlador PID es el que requiere menor consumo de energía para controlar el sistema, mientras que el controlador que mejor desempeño en seguimiento tiene es el CMD, aunque demanda un mayor consumo de energía, y ésta aumenta cuando el sistema se ve afectado por perturbaciones.

REFERENCIAS

Aleksandrov, D. and Penkov, I. (2012). Optimal gap distance between rotors of mini quadrotor helicopter. In *Proceedings of the 8th DAAAM Baltic Conference, Tallinn, Estonia*, 19–21.

Bouadi, H. et al. (2007). Sliding mode control based on backstepping approach for an UAV type-quadrotor. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 26(5), 22–27.

Chovancová, A. et al. (2016). Comparison of various quaternion-based control methods applied to quadrotor with disturbance observer and position estimator. *Robotics and Autonomous Systems*, 79, 87–98.

Gelfand, I., Silverman, R., et al. (2000). *Calculus of variations*. Courier Corporation.

Gomes, S.B.V. and Ramos, J.G. (1998). Airship dynamic modeling for autonomous operation. In *Robotics and Automation, 1998. Proceedings. 1998 IEEE International Conference on*, volume 4, 3462–3467.

Izaguirre-Espinosa, C. et al. (2016). Fractional attitude-reactive control for robust quadrotor position stabilization without resolving underactuation. *Control Engineering Practice*, 53, 47–56.

Jayakrishnan, H. (2016). Position and attitude control of a quadrotor UAV using super twisting sliding mode. *IFAC-PapersOnLine*, 49(1), 284–289.

Kumar, V. (2017). `https://es.coursera.org/learn/robotics-flight/lecture/oRtvH/time-motion-and-trajectories`.

Levant, A. (2005). Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers. *IEEE transactions on automatic control*, 50(11), 1812–1816.

Lyu, P. et al. (2017). A model-aided optical flow/inertial sensor fusion method for a quadrotor. *The Journal of Navigation*, 70(2), 325–341.

Madani, T. and Benallegue, A. (2006). Backstepping control for a quadrotor helicopter. In *2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 3255–3260.

Mellinger, D. and Kumar, V. (2011). Minimum snap trajectory generation and control for quadrotors. In *Robotics and Automation (ICRA), 2011 IEEE International Conference on*, 2520–2525.

Mian, A. and Daobo, W. (2008). Modeling and backstepping-based nonlinear control strategy for a 6 DOF quadrotor helicopter. *Chinese Journal of Aeronautics*, 21(3), 261–268.

Miranda-Colorado, R. (2016). *Cinemática y Dinámica de Robots Manipuladores*. Alfaomega, Ciudad de México, 1ra Edición.

Özbek, N.S. et al. (2016). Feedback control strategies for quadrotor-type aerial robots: a survey. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 38, 529–554.

Roberts, J. et al. (2008). Energy management for indoor hovering robots. In *2008 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 1242–1247.

Sanchez, A. et al. (2012). Continuous reactive-based position-attitude control of quadrotors. In *2012 American Control Conference (ACC)*, 4643–4648.

Sumantri, B. et al. (2016). Least squares based sliding mode control for a quad-rotor helicopter and energy saving by chattering reduction. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 66, 769–784.

Wang, C. et al. (2014). Controller development and validation for a small quadrotor with compensation for model variation. In *Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), 2014 International Conference on*, 902–909.